Domácí úkol č. 9 (nepovinný) - Příklady z lineární algebry.

Jméno a příjmení :

---

1. Buďte dány vektory $\vec{u} = (3, \ 2, \ 2), \vec{v} = (2, \ 1, \ -1)$. Spočítejte $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$.

---

2. Jsou dány vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \in R^4$:

$$\vec{u}_1 = (1, \ -1, \ 2, \ 3) \ , \quad \vec{u}_2 = (0, \ 2, \ 1, \ 0), \quad \vec{u}_3 = (0, \ 0, \ -1, \ 1) \ .$$

a) Ukažte dle definice, že vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ jsou lineárně nezávislé.

b) Vysvětlete, co je lineární obal skupiny vektorů a pak zjistěte, zda vektory $\vec{v} = (1, \ -3, \ -1, \ 5)$ a $\vec{w} = (-1, \ 1, \ -3, \ -2)$ leží v lineárním obalu vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$.

c) Tvoří vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ basi prostoru R^4 ? Své tvrzení odůvodněte.

Pokud basi netvoří, doplňte tuto skupinu vektorů na basi R^4 .

---

3. Existuje reálné číslo a, pro které jsou vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4 \in R^4$ lineárně závislé, je-li :

$$\vec{u}_1 = (0, \ 0, \ -1, \ a^2), \ \vec{u}_2 = (1, \ 2a, \ -a, \ 1), \ \vec{u}_3 = (0, \ 0, \ 0, \ 3), \ \vec{u}_4 = (0, \ 2, \ a^3, \ 1) \ ?$$

---

4. a) Definujte pojem base vektorového prostoru V a vysvětlete, co rozumíme souřadnicemi vektoru vzhledem k dané basi .

b) Ukažte , že vektory $\vec{b}_1 = (1, 1, 0), \ \vec{b}_2 = (1, 0, -1), \ \vec{b}_3 = (0, 1, 2)$ tvoří basi prostoru R^3 .

c) Najděte souřadnice vektoru $\vec{x} = (1, 3, 3)$ vzhledem k basi $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$.

---

5. Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

a) Určete hodnost matice A.

b) Co můžete říci na základě výsledku z a) o množině řešení soustavy rovnic

$$(*) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad ?$$

c) Soustavu $(*)$ vyřešte .

6. Je dána matice

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Najděte všechny vektory $v \in R^4$, které jsou ortogonální ke každému z řádků matice A.

b) Ukažte, že tyto vektory tvoří podprostor R^4 dimense 2.

---

7. Vypočítejte determinanty :

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & -a & 2a & a \\ b & -b & 0 & b \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3c & -c & 2c & c \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

---

8. Buďte dány matice

i) $$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N=\begin{pmatrix} a & a & -2a \\ -1 & 0 & 2 \\ b & b & -3b \end{pmatrix}$$

ii) $$M=\begin{pmatrix} a & 2a & -a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & -b & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

(i) vypočítejte $\det M$;
(ii) vypočítejte $\det N$;
(iii) vypočítejte $\det(M \cdot N)$.

---

9. Najděte všechna řešení rovnice $$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

---

10. Existuje reálné číslo a, pro které je singulární matice

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & a^2 \\ 1 & 2a & -a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & a^3 & 1 \end{pmatrix} \quad ?$$

---

11. Je dána matice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ukažte, že matice A je matice regulární a Gauss-Jordanovou metodou i užitím determinantů určete matici inverzní k matici A .

---

12 . Jsou dány matice
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Ukažte, že k matici A existuje matice inverzní a určete ji.

b) Užitím inverzní matice řešte maticovou rovnici $A \cdot X = B$ a proveďte zkoušku správnosti řešení.
